Разбор заданий школьного этапа ВсОШ по математике

для 9 класса

2024/25 учебный год

Максимальное количество баллов — 8

Задание № 1.1

Условие:

На координатной плоскости OXY отметили все точки (x, y), координаты которых удовлетворяют уравнению $x^2 + 2xy = 0$. Что за множество получилось?

Ответ:

- ○ Прямая
- ○ Одна точка
- ○ Окружность
- ✓ Две пересекающиеся прямые
- ○ Две параллельные прямые
- ○ Парабола
- ○ Пустое множество

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Произведение равно 0, когда хотя бы один из сомножителей равен 0. Множество представляет из себя объединение прямой $x = 0$ и прямой $x + 2y = 0$.

Задание № 1.2

Условие:

На координатной плоскости OXY отметили все точки (x, y), координаты которых удовлетворяют уравнению $x^2 + 4xy + 4y^2 = 0$. Что за множество получилось?

Ответ:

- ✓ Прямая
- o Одна точка
- o Окружность
- o Две пересекающиеся прямые
- o Две параллельные прямые
- o Парабола
- o Пустое множество

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 1.1

Задание № 1.3

Условие:

На координатной плоскости OXY отметили все точки (x, y), координаты которых удовлетворяют уравнению $x^2 + 5x + y^2 = 0$. Что за множество получилось?

Ответ:

- o Прямая
- o Одна точка
- ✓ Окружность
- o Две пересекающиеся прямые
- o Две параллельные прямые
- o Парабола
- o Пустое множество

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 1.1

Задание № 1.4

Условие:

На координатной плоскости OXY отметили все точки (x, y), координаты которых удовлетворяют уравнению $x^2 + 3y^2 = 2x - 1$. Что за множество получилось?

Ответ:

- o Прямая
- ✓ Одна точка
- o Окружность
- o Две пересекающиеся прямые
- o Две параллельные прямые
- o Парабола
- o Пустое множество

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 1.1

Задание № 2.1

Условие:

В треугольник со сторонами 5, 6 и 8 вписана окружность. Петя посчитал расстояния от каждой из вершин треугольника до ближайшей точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника. Чему равно наименьшее из этих расстояний?

Ответ: 1.5

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Расстояние от вершины треугольника до точки касания вписанной окружности с выходящими из неё сторонами равны. Пусть стороны треугольника a, b и c, расстояния от вершин до точек касания с окружностью равны x, y, и z. Тогда $a = y + z$, $b = x + z$, $c = x + y$, тогда через стороны треугольника эти расстояния находятся по формуле $x = (b + c - a) \div 2$, $y = (a + c - b) \div 2$, $z = (a + b - c) \div 2$. Наименьшее расстояние получается, когда вычитается наибольшая из сторон, в нашем случае это $(5 + 6 - 8) \div 2 = 1.5$.

Задание № 2.2

Условие:

В треугольник со сторонами 4, 5 и 8 вписана окружность. Петя посчитал расстояния от каждой из вершин треугольника до ближайшей точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника. Чему равно наименьшее из этих расстояний?

Ответ: 0.5

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 2.1

Задание № 2.3

Условие:

В треугольник со сторонами 6, 7 и 8 вписана окружность. Петя посчитал расстояния от каждой из вершин треугольника до ближайшей точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника. Чему равно наименьшее из этих расстояний?

Ответ: 2.5

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 2.1

Задание № 2.4

Условие:

В треугольник со сторонами 4, 5 и 6 вписана окружность. Петя посчитал расстояния от каждой из вершин треугольника до ближайшей точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника. Чему равно наименьшее из этих расстояний?

Ответ: 1.5

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 2.1

Задание № 3.1

Условие:

У Пети есть по одной карточке с цифрами 9, 8, 7, 4, 3. Он составил из них пятизначное число. Вася составил из них другое пятизначное число, вычел из большего меньшее и записал результат на доске. Получилось четырёхзначное число, состоящее из различных цифр, отличных от изначальных. Какая цифра осталась не задействована? Числа не могут начинаться с 0.

Ответ: 5

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Изначальные два числа имеют одинаковую сумму цифр, а значит, их разность делится на 9. Остались цифры 0, 1, 2, 5, 6. Чтобы сумма делилась на 9, надо убрать 5. Осталось убедиться, что набор цифр 0, 1, 2, 6 достижим. Действительно, 94873 – 93847 = 1026.

Задание № 3.2

Условие:

У Пети есть по одной карточке с цифрами 7, 6, 3, 2, 0. Он составил из них пятизначное число. Вася составил из них другое пятизначное число, вычел из большего меньшее и записал результат на доске. Получилось четырёхзначное число, состоящее из различных цифр, отличных от изначальных. Какая цифра осталась не задействована? Числа не могут начинаться с 0.

Ответ: 9

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 3.1

Задание № 3.3

Условие:

У Пети есть по одной карточке с цифрами 8, 7, 4, 2, 1. Он составил из них пятизначное число. Вася составил из них другое пятизначное число, вычел из большего меньшее и записал результат на доске. Получилось четырёхзначное число, состоящее из различных цифр, отличных от изначальных. Какая цифра осталась не задействована? Числа не могут начинаться с 0.

Ответ: 5

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 3.1

Задание № 3.4

Условие:

У Пети есть по одной карточке с цифрами 9, 7, 4, 0, 1. Он составил из них пятизначное число. Вася составил из них другое пятизначное число, вычел из большего меньшее и записал результат на доске. Получилось четырёхзначное число, состоящее из различных цифр, отличных от изначальных. Какая цифра осталась не задействована? Числа не могут начинаться с 0.

Ответ: 6

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 3.1

Задание № 4.1

Условие:

Родители с сыном отправились по тропе к озеру. Сын сразу пошёл вперед, а дойдя до озера, повернул назад и шёл, пока не встретил идущих медленнее родителей. Длина его пути до озера оказалась равна 800 шагам, а назад до родителей — 600 шагам. Общее потраченное сыном время до встречи с родителями — 20 минут. Через сколько минут после встречи с возвращающимся сыном родители дойдут до озера? Считаем, что шаги имеют равную длину, скорости сына и родителей постоянны.

Ответ: 60

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Соотношение расстояний от начала пути до озера и от точки встречи до озера такое же, как у числа шагов: $\frac{600}{800}$, то есть точка встречи находится на расстоянии четверти пути от начала. То есть родители прошли четверть пути до озера за 20 минут. Значит, весь путь займёт у них 80 минут, а после встречи с сыном — один час.

Задание № 4.2

Условие:

Родители с сыном отправились по тропе к озеру. Сын сразу пошёл вперед, а дойдя до озера, повернул назад и шёл, пока не встретил идущих медленнее родителей. Длина его пути до озера оказалась равна 400 шагам, а назад до родителей — 300 шагам. Общее потраченное сыном время до встречи с родителями — 15 минут. Через сколько минут после встречи с возвращающимся сыном родители дойдут до озера? Считаем, что шаги имеют равную длину, скорости сына и родителей постоянны.

Ответ: 45

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 4.1

Задание № 4.3

Условие:

Родители с сыном отправились по тропе к озеру. Сын сразу пошёл вперед, а дойдя до озера, повернул назад и шёл, пока не встретил идущих медленнее родителей. Длина его пути до озера оказалась равна 300 шагам, а назад до родителей — 250 шагам. Общее потраченное сыном время до встречи с родителями — 10 минут. Через сколько минут после встречи с возвращающимся сыном родители дойдут до озера? Считаем, что шаги имеют равную длину, скорости сына и родителей постоянны.

Ответ: 50

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 4.1

Задание № 4.4

Условие:

Родители с сыном отправились по тропе к озеру. Сын сразу пошёл вперед, а дойдя до озера, повернул назад и шёл, пока не встретил идущих медленнее родителей. Длина его пути до озера оказалась равна 500 шагам, а назад до родителей — 400 шагам. Общее потраченное сыном время до встречи с родителями — 15 минут. Через сколько минут после встречи с возвращающимся сыном родители дойдут до озера? Считаем, что шаги имеют равную длину, скорости сына и родителей постоянны.

Ответ: 60

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 4.1

Задание № 5.1

Условие:

Натуральные корни x_1 и x_2 многочлена $x^2 - bx + c$ таковы, что произведение bcx_1x_2 равно 22932. Найдите наибольшее возможное значение c.

Ответ: 42

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

По теореме Виета $bc^2 = 22932$. То есть c^2 — делитель 22932. Как нетрудно убедиться, $22932 = 42^2 \cdot 13$, откуда **c** не больше 42. Многочлен $(x - 6)(x - 7)$ удовлетворяет условиям.

Задание № 5.2

Условие:

Натуральные корни x_1 и x_2 многочлена $x^2 - bx + c$ таковы, что произведение bcx_1x_2 равно 20800. Найдите наибольшее возможное значение c.

Ответ: 40

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 5.1

Задание № 5.3

Условие:

Натуральные корни x_1 и x_2 многочлена $x^2 - bx + c$ таковы, что произведение bcx_1x_2 равно 16848. Найдите наибольшее возможное значение c.

Ответ: 36

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 5.1

Задание № 5.4

Условие:

Натуральные корни x_1 и x_2 многочлена $x^2 - bx + c$ таковы, что произведение bcx_1x_2 равно 11700. Найдите наибольшее возможное значение c.

Ответ: 30

Точное совпадение ответа — 1 балл

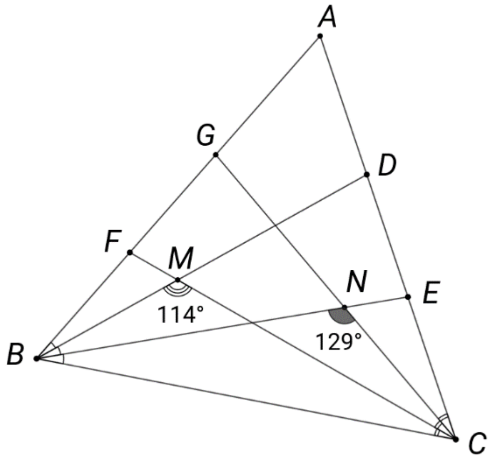
Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 5.1

Задание № 6.1

Условие:

В треугольнике ABC отрезки BD и BE делят угол ∠ABC на три равные части. Отрезки CF и CG делят угол ∠ACB на три равные части. Отрезки BD и CF пересекаются в точке M, а отрезки BE и CG пересекаются в точке N. Известно, что ∠BMC = 114° ∠BNC = 129°. Найдите углы треугольника ABC. Ответ выразите в градусах.



Ответ: ∠ABC = 81°, ∠ACB = 36°, ∠BAC = 63°.

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Пусть bet — это треть угла ∠ABC, gam — это треть угла ACB. Рассматривая углы треугольника BMC находим, что 2bet + gam + 114° = 180°.

Рассматривая углы треугольника BNC находим, что bet +2gam + 129° = 180°.

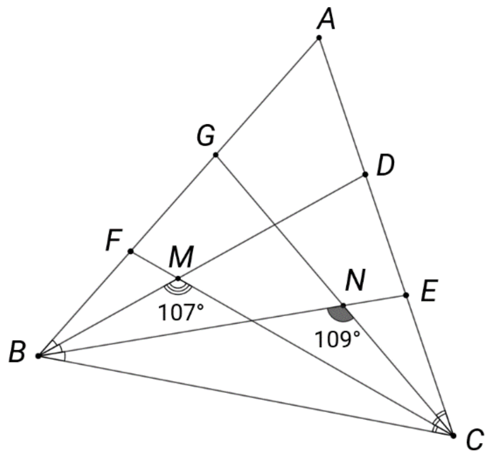
Складывая эти два равенства, находим, что 3bet + 3gam = 66 ° + 51° = 117°, или bet + gam = 39°. Вычитая из первого второе, находим, что bet – gam = 15°, откуда bet = 27°, gam = 12°.

Откуда имеем углы треугольника ∠ABC = 81°, ∠ACB = 36°, ∠BAC =180° – – 81° – 36° = 63°.

Задание № 6.2

Условие:

В треугольнике ABC отрезки BD и BE делят угол ∠ABC на три равные части. Отрезки CF и CG делят угол ∠ACB на три равные части. Отрезки BD и CF пересекаются в точке M, а отрезки BE и CG пересекаются в точке N. Известно, что ∠BMC = 107° ∠BNC = 109°. Найдите углы треугольника ABC. Ответ выразите в градусах.



Ответ: ∠ABC = 75°, ∠ACB = 69°, ∠BAC = 36°.

Точное совпадение ответа — 1 балл

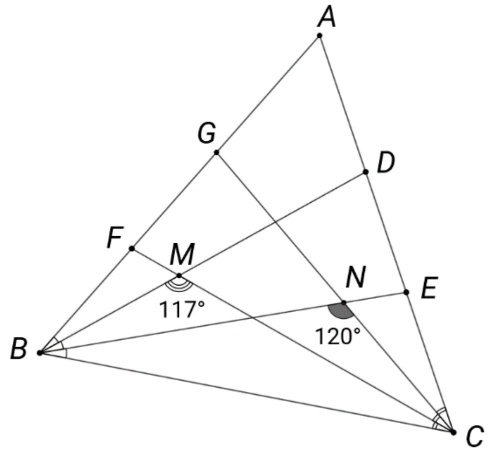
Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 6.1

Задание № 6.3

Условие:

В треугольнике ABC отрезки BD и BE делят угол ∠ABC на три равные части. Отрезки CF и CG делят угол ∠ACB на три равные части. Отрезки BD и CF пересекаются в точке M, а отрезки BE и CG пересекаются в точке N. Известно, что ∠BMC = 117° ∠BNC = 120°. Найдите углы треугольника ABC. Ответ выразите в градусах.



Ответ: ∠ABC = 66°, ∠ACB = 57°, ∠BAC = 57°.

Точное совпадение ответа — 1 балл

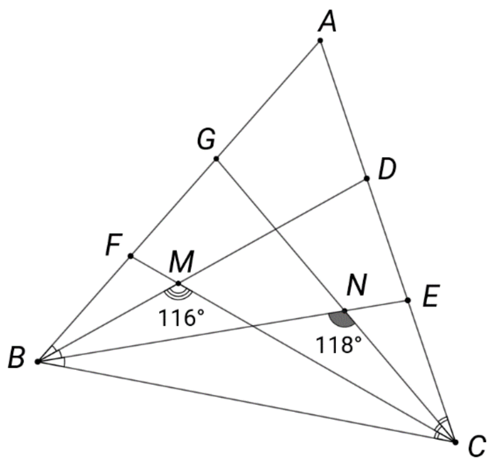
Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 6.1

Задание № 6.4

Условие:

В треугольнике ABC отрезки BD и BE делят угол ∠ABC на три равные части. Отрезки CF и CG делят угол ∠ACB на три равные части. Отрезки BD и CF пересекаются в точке M, а отрезки BE и CG пересекаются в точке N. Известно, что ∠BMC = 116° ∠BNC = 118°. Найдите углы треугольника ABC. Ответ выразите в градусах.



Ответ: ∠ABC = 66°, ∠ACB = 60°, ∠BAC = 54°.

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 6.1

Задание № 7.1

Условие:

В кругу сидели 12 болельщиков команд «Шайба» и «Зубило». Каждый болел ровно за одну из этих двух команд. Каждый болельщик сказал своему соседу слева одну из двух фраз: или «ты болеешь за ту же команду, что и мой сосед справа», или «вы с моим соседом справа болеете за разные команды». Оказалось, что ровно половина болельщиков сказала первую фразу и ровно половина — вторую. При этом каждый говорил правду, если обращался к своему единомышленнику (болеющему за ту же команду), и лгал, если обращался к фанату другой команды. Какое максимальное количество болельщиков «Шайбы» могло быть?

Ответ: 9

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Фраза «ты болеешь за ту же команду, что и мой сосед справа» звучит тогда и только тогда, когда говорящий — единомышленник своего соседа справа. Действительно, если сосед слева единомышленник, то произнесённое — истина, и все трое болеют за одну команду. Если же сосед слева — фанат другой команды, то звучит ложь, и сосед справа различен во вкусах с соседом слева, то есть совпадает с говорящим. Аналогично, фраза «вы с правым соседям болеете за разные команды» означает, что говорящий и его сосед справа болеют за разные команды. То есть задача сводится к тому, что половина сидящих болеет за ту же команду, что их правый сосед, а половина — за другую.

Из пары [сказавший вторую фразу, его сосед справа] хотя бы один болеет за Зубило. При этом один болельщик может входить в такую пару не более, чем дважды (когда говорит он сам, и когда говорит его сосед слева). Поэтому число болельщиков Зубила — не меньше половины сказавших вторую фразу, то есть не меньше четверти от общего количества болельщиков.

Эта оценка строгая. Если 6 болельщиков Шайбы сидят рядом, а на шести оставшихся местах болельщики Шайбы и Зубила чередуются, то условия выполнены и имеем 9 болельщиков Шайбы:

ШШ…Ш ЗШ…ЗШ.

Задание № 7.2

Условие:

В кругу сидели 20 болельщиков команд «Шайба» и «Зубило». Каждый болел ровно за одну из этих двух команд. Каждый болельщик сказал своему соседу слева одну из двух фраз: или «ты болеешь за ту же команду, что и мой сосед справа», или «вы с моим соседом справа болеете за разные команды». Оказалось, что ровно половина болельщиков сказала первую фразу и ровно половина — вторую. При этом каждый говорил правду, если обращался к своему единомышленнику (болеющему за ту же команду), и лгал, если обращался к фанату другой команды. Какое максимальное количество болельщиков «Шайбы» могло быть?

Ответ: 15

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 7.1

Задание № 7.3

Условие:

В кругу сидели 24 болельщика команд «Шайба» и «Зубило». Каждый болел ровно за одну из этих двух команд. Каждый болельщик сказал своему соседу слева одну из двух фраз: или «ты болеешь за ту же команду, что и мой сосед справа», или «вы с моим соседом справа болеете за разные команды». Оказалось, что ровно половина болельщиков сказала первую фразу и ровно половина — вторую. При этом каждый говорил правду, если обращался к своему единомышленнику (болеющему за ту же команду), и лгал, если обращался к фанату другой команды. Какое максимальное количество болельщиков «Шайбы» могло быть?

Ответ: 18

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 7.1

Задание № 7.4

Условие:

В кругу сидели 16 болельщиков команд «Шайба» и «Зубило». Каждый болел ровно за одну из этих двух команд. Каждый болельщик сказал своему соседу слева одну из двух фраз: или «ты болеешь за ту же команду, что и мой сосед справа», или «вы с моим соседом справа болеете за разные команды». Оказалось, что ровно половина болельщиков сказала первую фразу и ровно половина — вторую. При этом каждый говорил правду, если обращался к своему единомышленнику (болеющему за ту же команду), и лгал, если обращался к фанату другой команды. Какое максимальное количество болельщиков «Шайбы» могло быть?

Ответ: 12

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 7.1

Задание № 8.1

Условие:

В океане кораллы часто сливаются в единый организм для лучшего выживания. При слиянии двух кораллов с M и N щупальцами вместо них образуется один коралл с $(M + N - 1)$ щупальцами. Вначале имеется 100 кораллов с тремя щупальцами, 101 коралл с четырьмя щупальцами и 102 коралла с пятью щупальцами. После нескольких слияний остался один коралл. Какое наибольшее количество щупалец у него может быть?

Ответ: 912

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

При любом слиянии и число кораллов, и общее число щупалец уменьшается на 1. То есть сохраняется разность между общим количеством щупалец и количеством кораллов. Вначале было 303 коралла с $100 \cdot 3 + 101 \cdot 4 + 102 \cdot 5 = 1214$ щупальцами. Разность равна $1214 - 303 = 911$. Когда останется один коралл, число щупалец у него будет ровно 912, не зависимо от порядка объединения.

Задание № 8.2

Условие:

В океане кораллы часто сливаются в единый организм для лучшего выживания. При слиянии двух кораллов с M и N щупальцами вместо них образуется один коралл с $(M + N - 1)$ щупальцами. Вначале имеется 50 кораллов с тремя щупальцами, 51 коралл с четырьмя щупальцами и 52 коралла с пятью щупальцами. После нескольких слияний остался один коралл. Какое наибольшее количество щупалец у него может быть?

Ответ: 462

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 8.1

Задание № 8.3

Условие:

В океане кораллы часто сливаются в единый организм для лучшего выживания. При слиянии двух кораллов с M и N щупальцами вместо них образуется один коралл с $(M + N - 1)$ щупальцами. Вначале имеется 200 кораллов с тремя щупальцами, 201 коралл с четырьмя щупальцами и 202 коралла с пятью щупальцами. После нескольких слияний остался один коралл. Какое наибольшее количество щупалец у него может быть?

Ответ: 1812

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 8.1

Задание № 8.4

Условие:

В океане кораллы часто сливаются в единый организм для лучшего выживания. При слиянии двух кораллов с M и N полипами вместо них образуется один коралл с (M + N − 1) щупальцами. Вначале имеется 500 кораллов с тремя щупальцами, 501 коралл с четырьмя щупальцами и 502 коралла с пятью щупальцами. После нескольких слияний остался один коралл. Какое наибольшее количество щупалец у него может быть?

Ответ: 4512

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 8.1