Разбор заданий школьного этапа ВсОШ по математике

для 8 класса

2024/25 учебный год

Максимальное количество баллов — 8

Задание № 1.1

Условие:

Попарно различные числа a, b и c таковы, что $ab + 2c = ac + 2b$. Найдите a.

Ответ: 2

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Перепишем равенство в виде $ab - ac = 2b - 2c$, $a(b - c) = 2(b - c)$. Сократив на $b - c$ (по условию все числа различны), получим $a = 2$.

Задание № 1.2

Условие:

Попарно различные числа x, y и z таковы, что $xy - 2z = xz - 2y$. Найдите x.

Ответ: -2

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 1.1

Задание № 1.3

Условие:

Попарно различные числа a, b и c таковы, что $bc + 3a = ac + 3b$. Найдите c.

Ответ: 3

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 1.1

Задание № 1.4

Условие:

Попарно различные числа x, y и z таковы, что $yz + 5x = xy + 5z$. Найдите y.

Ответ: 5

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 1.1

Задание № 2.1

Условие:

Андрей сделал шарнирный подвижный четырёхугольник ABCD с длинами сторон AB = 105 мм, BC = 107 мм, CD = 109 мм и AD = 108 мм. Какой из углов этого четырёхугольника может быть больше 180 градусов? Выберите все возможные варианты:

Ответ:

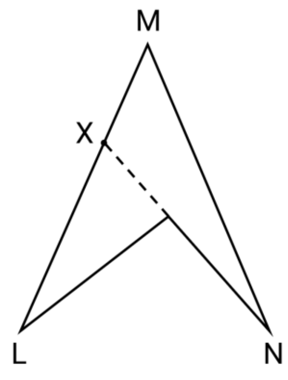
- ✓ A
- ✓ B
- o C
- o D
- o Ни один из перечисленных

Точное совпадение ответа — 1 балл

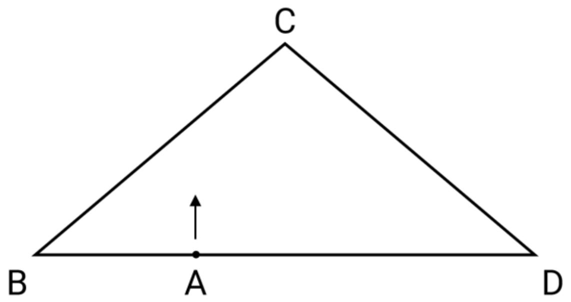
Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Заметим следующий факт. Пусть KLMN — невыпуклый четырёхугольник, причём угол K больше 180 градусов. Тогда NK + KL < NM + ML. Это можно доказать, например, так: продолжим NK до пересечения с ML (соответствующую точку пересечения обозначим за X). Тогда NK + KL < NK + KX + XL = NX + XL < NM + MX + XL = NM + ML (мы дважды пользуемся неравенством треугольника).



Вернёмся к нашей задаче. Из условия следует, что AD + AB < BC + CD и AB + BC < CD + DA (остальные пары неравенств неверны), поэтому только A и B могут быть больше развёрнутых. Оба варианта реализуются: представим четырёхугольник как шарнирный механизм, тогда соответствующий угол (например, A) мы можем сделать развёрнутым — неравенство треугольника позволяет нам это сделать. Теперь мы можем чуть-чуть уменьшить диагональ BD с сохранением сторон, тогда вершина A «съедет» с диагонали BD. Осталось проследить, чтобы она съехала в нужную нам полуплоскость.



Задание № 2.2

Условие:

Лена сделала шарнирный подвижный четырёхугольник KLMN с длинами сторон KL = 75 мм, LM = 76 мм, MN = 79 мм и KN = 77 мм. Какой из углов этого четырёхугольника может быть больше 180 градусов? Выберите все возможные варианты:

Ответ:

- ✓ K
- ✓ L
- o M
- o N
- o Ни один из перечисленных

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 2.1

Задание № 2.3

Условие:

Костя сделал шарнирный подвижный четырёхугольник ABCD с длинами сторон AB = 90 мм, BC = 95 мм, CD = 91 мм и AD = 92 мм. Какой из углов этого четырёхугольника может быть больше 180 градусов? Выберите все возможные варианты:

Ответ:

- ✓ A
- o B
- o C
- ✓ D
- o Ни один из перечисленных

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 2.1

Задание № 2.4

Условие:

Виталик сделал шарнирный подвижный четырёхугольник XYZT с длинами сторон XY = 86 мм, YZ = 81 мм, ZT = 82 мм и TX = 83 мм. Какой из углов этого четырёхугольника может быть больше 180 градусов? Выберите все возможные варианты:

Ответ:

- o X
- o Y
- ✓ Z
- ✓ T
- o Ни один из перечисленных

Точное совпадение ответа — 1 балл

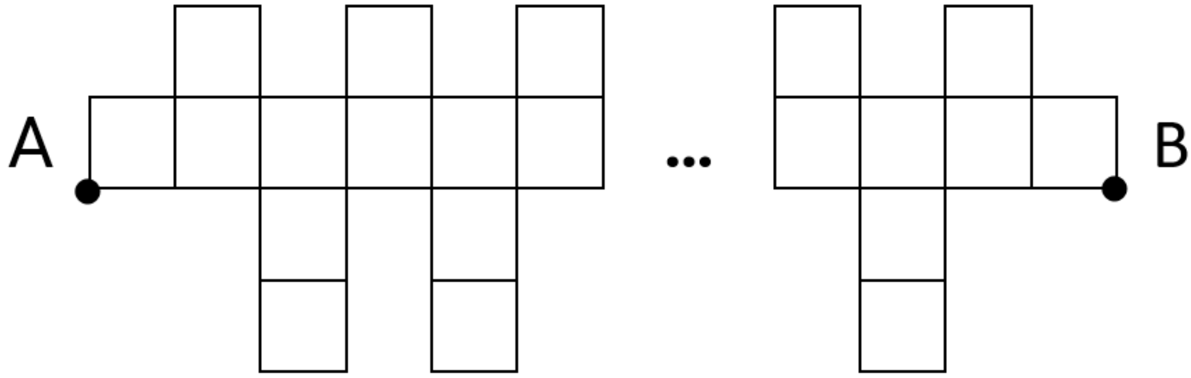
Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 2.1

Задание № 3.1

Условие:

На рисунке изображена фигура, состоящая из 304 единичных клеток.



Найдите длину отрезка AB.

Ответ: 123

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

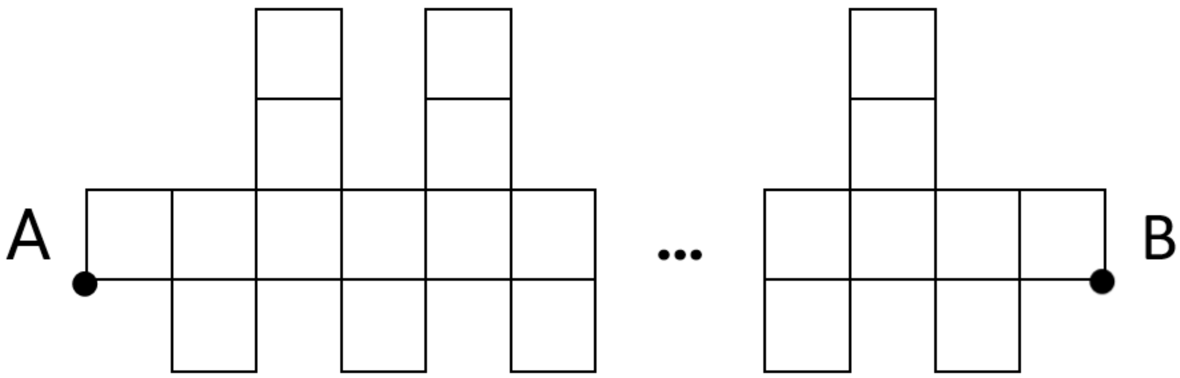
Решение.

Уберём четыре клетки: одну — граничащую с точкой A, и ещё три — ближайшие к B. Оставшаяся часть разобьётся на пятиклеточные «зигзаги». Таких зигзагов будет 60, и каждый добавляет по две клетки к расстоянию AB — итого 120 клеток. Вспоминая про те клетки, которые мы убрали (они добавляют ещё три клетки к AB), получаем ответ 123.

Задание № 3.2

Условие:

На рисунке изображена фигура, состоящая из 234 единичных клеток.



Найдите длину отрезка AB.

Ответ: 95

Точное совпадение ответа — 1 балл

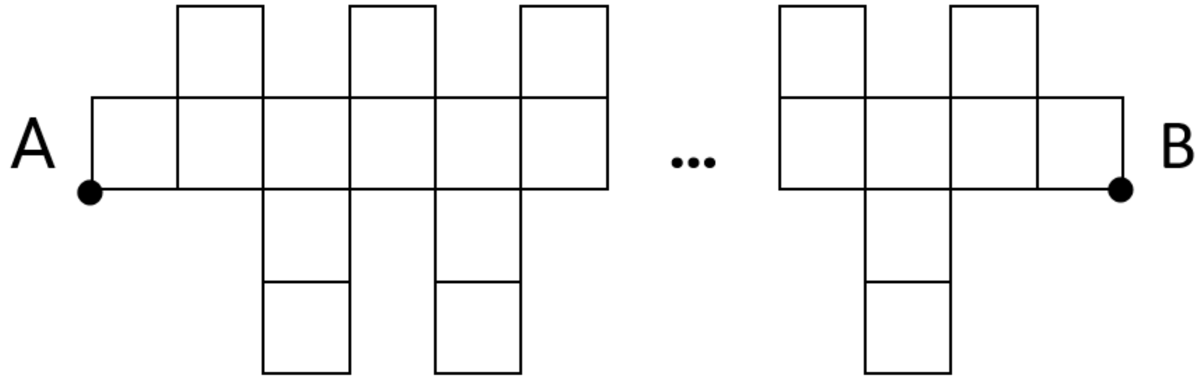
Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 3.1

Задание № 3.3

Условие:

На рисунке изображена фигура, состоящая из 369 единичных клеток.



Найдите длину отрезка AB.

Ответ: 149

Точное совпадение ответа — 1 балл

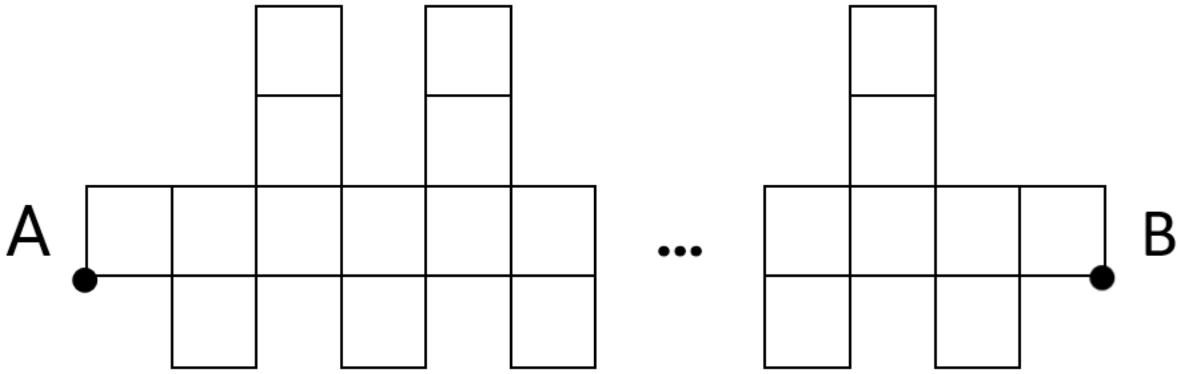
Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 3.1

Задание № 3.4

Условие:

На рисунке изображена фигура, состоящая из 654 единичных клеток.



Найдите длину отрезка AB.

Ответ: 263

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 3.1

Задание № 4.1

Условие:

Число 328*16 делится на каждую из своих цифр. Восстановите пропущенную цифру.

Ответ: 4

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Число должно делиться на 8, а значит, число, составленное из последних трёх цифр, тоже должно делиться на 8. Значит, пропущенная цифра чётная.

С другой стороны, сумма цифр должна делиться на 3 (одна из цифр — тройка), а тогда пропущенная цифра — 1, 4 или 7. Из них чётной является только 4.

Задание № 4.2

Условие:

Число 483*24 делится на каждую из своих цифр. Восстановите пропущенную цифру.

Ответ: 6

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 4.1

Задание № 4.3

Условие:

Число 823*16 делится на каждую из своих цифр. Восстановите пропущенную цифру.

Ответ: 4

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 4.1

Задание № 4.4

Условие:

Число 348*24 делится на каждую из своих цифр. Восстановите пропущенную цифру.

Ответ: 6

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 4.1

Задание № 5.1

Условие:

На сторонах BC и CD квадрата ABCD отмечены точки K и L соответственно. Оказалось, что $AK = 2KL$, $\angle AKL = 90°$, $AL = 10$. Найдите сторону квадрата.

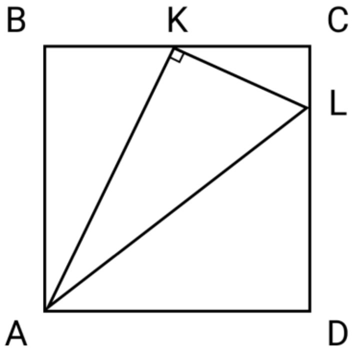
Ответ: 8

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Так как $\angle AKL = 90°$, то $\angle AKB + \angle CKL = 90°$, то есть $\angle CKL = \angle BAK$, а тогда треугольник ABK подобен треугольнику KCL с коэффициентом 2.



Так как AB — сторона квадрата, то CK — половина стороны. Итак, K является серединой BC. Легко видеть также, что $CL \div LD = 1 \div 3$. Пусть a — сторона квадрата. По теореме Пифагора для треугольника ADL имеем

$$a^2 + \left(\frac{3a}{4}\right)^2 = 100$$

$$\frac{25a^2}{16} = 100$$

откуда $a = 8$.

Примечание. В этой задаче легко обойтись без подобия. Например, отметить точки X, Y и Z — середины AB, BK и AK, и доказать, что равны треугольники AXZ, XBY, YZX, ZYK и KCL.

Задание № 5.2

Условие:

На сторонах BC и CD квадрата ABCD отмечены точки X и Y соответственно. Оказалось, что $AX = 2XY$, $\angle AXY = 90°$, $AY = 20$. Найдите сторону квадрата.

Ответ: 16

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 5.1

Задание № 5.3

Условие:

На сторонах CD и AD квадрата ABCD отмечены точки K и L соответственно. Оказалось, что $BK = 2KL$, $\angle BKL = 90°$, $BL = 10$. Найдите сторону квадрата.

Ответ: 8

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 5.1

Задание № 5.4

Условие:

На сторонах BC и CD квадрата ABCD отмечены точки K и L соответственно. Оказалось, что $KL = 1/2AL$, $\angle ALK = 90°$, $AK = 20$. Найдите сторону квадрата.

Ответ: 16

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 4

Решение по аналогии с заданием 5.1

Задание № 6.1

Условие:

В двух кабинетах было по 30 учеников, причём в каждом из них по 15 мальчиков и 15 девочек. После того как десять учеников перебежали из второго кабинета в первый, оказалось, что 40 % учеников в первом кабинете — мальчики. А сколько процентов детей во втором кабинете являются мальчиками?

Ответ: 70

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

После того как десятеро перебежали из второго кабинета в первый, в первом кабинете оказалось 40 учеников. Так как 40 % из них — мальчики, то мальчиков 16. Значит, из второго кабинета перебежал один мальчик и девять девочек, а осталось там 14 мальчиков и 6 девочек (всего 20 детей). Отсюда процент мальчиков во втором кабинете — 70.

Задание № 6.2

Условие:

В двух кабинетах было по 20 учеников, причём в каждом из них по 10 мальчиков и 10 девочек. После того как пять учеников перебежали из второго кабинета в первый, оказалось, что 44 % учеников в первом кабинете — мальчики. А сколько процентов детей во втором кабинете являются мальчиками?

Ответ: 60

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 6.1

Задание № 6.3

Условие:

В двух кабинетах было по 40 учеников, причём в каждом из них по 20 мальчиков и 20 девочек. После того как 15 учеников перебежали из второго кабинета в первый, оказалось, что 40 % учеников в первом кабинете — мальчики. А сколько процентов детей во втором кабинете являются мальчиками?

Ответ: 72

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 6.1

Задание № 6.4

Условие:

В двух кабинетах было по 30 учеников, причём в каждом из них по 15 мальчиков и 15 девочек. После того как десять учеников перебежали из второго кабинета в первый, оказалось, что 45 % учеников в первом кабинете — мальчики. А сколько процентов детей во втором кабинете являются мальчиками?

Ответ: 60

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 6.1

Задание № 7.1

Условие:

Сто рыцарей, сто лжецов и сто болванов сидят за круглым столом в каком-то порядке. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут, а болваны всегда повторяют последнюю услышанную фразу. Каждый сказал одну из фраз: «Мой сосед справа — рыцарь», «Мой сосед справа — лжец» или «Мой сосед справа — болван», причём каждую следующую фразу говорил сидящий справа от того, кто сказал предыдущую фразу. Какое наибольшее количество фраз «Мой сосед справа — рыцарь» могло быть произнесено?

Ответ: 299

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Рассмотрим какого-нибудь рыцаря, у которого правый сосед — не рыцарь (для этого можно рассмотреть группу подряд идущих рыцарей и взять самого правого из них); он не сможет сказать: «Мой правый сосед — рыцарь». Значит, максимальное количество таких фраз — 299. Пример строится, если подряд стоят сперва сто рыцарей, затем сто лжецов, за ними сто болванов. Пусть первую фразу скажет первый из рыцарей. Тогда каждый лжец, а значит и каждый болван, будет говорить «Мой сосед справа — рыцарь».

Задание № 7.2

Условие:

Двести рыцарей, сто лжецов и пятьдесят болванов сидят за круглым столом в каком-то порядке. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут, а болваны всегда повторяют последнюю услышанную фразу. Каждый сказал одну из фраз: «Мой сосед справа — рыцарь», «Мой сосед справа — лжец» или «Мой сосед справа — болван», причём каждую следующую фразу говорил сидящий справа от того, кто сказал предыдущую фразу. Какое наибольшее количество фраз «Мой сосед справа — рыцарь» могло быть произнесено?

Ответ: 349

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 7.1

Задание № 7.3

Условие:

Сорок рыцарей, пятьдесят лжецов и шестьдесят болванов сидят за круглым столом в каком-то порядке. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут, а болваны всегда повторяют последнюю услышанную фразу. Каждый сказал одну из фраз: «Мой сосед справа — рыцарь», «Мой сосед справа — лжец» или «Мой сосед справа — болван», причём каждую следующую фразу говорил сидящий справа от того, кто сказал предыдущую фразу. Какое наибольшее количество фраз «Мой сосед справа — рыцарь» могло быть произнесено?

Ответ: 149

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 7.1

Задание № 7.4

Условие:

Сто рыцарей, пятьдесят лжецов и пятьдесят болванов сидят за круглым столом в каком-то порядке. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут, а болваны всегда повторяют последнюю услышанную фразу. Каждый сказал одну из фраз: «Мой сосед справа — рыцарь», «Мой сосед справа — лжец» или «Мой сосед справа — болван», причём каждую следующую фразу говорил сидящий справа от того, кто сказал предыдущую фразу. Какое наибольшее количество фраз «Мой сосед справа — рыцарь» могло быть произнесено?

Ответ: 199

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 7.1

Задание № 8.1

Условие:

Даны a, b > 0. Точки пересечения прямых y = ax + a, y = ax + b, y = bx + a, y = bx + b, и образуют четырёхугольник. Точка пересечения диагоналей этого четырёхугольника имеет ординату, равную 20. Найдите максимальную из ординат вершин этого четырёхугольника.

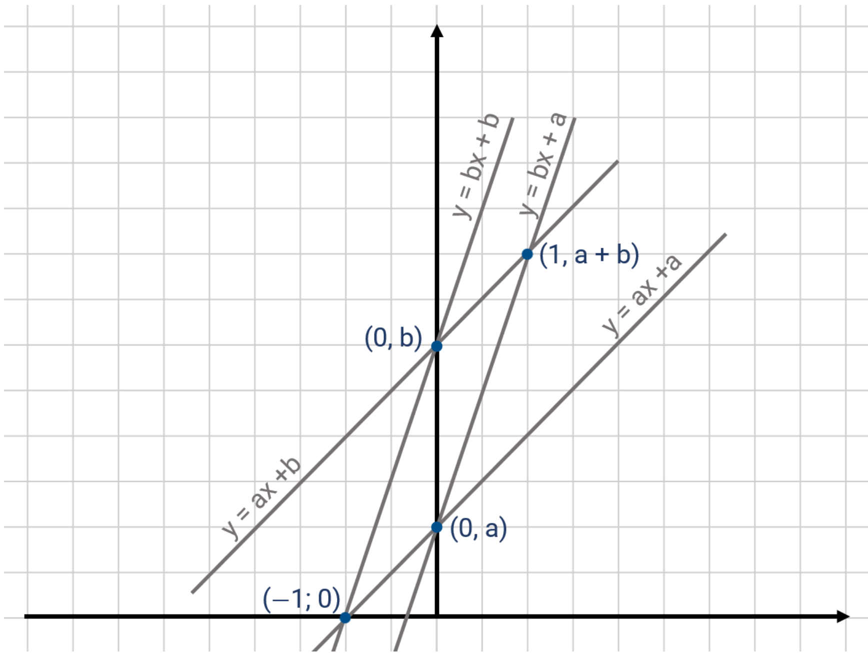
Ответ: 40

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Прямые y = ax + a и y = ax + b параллельны; также параллельны прямые y = bx + a и y = bx + b.



Значит, полученный четырёхугольник — параллелограмм. А у параллелограмма диагонали точкой пересечения делятся пополам. Кроме того, мы легко можем вычислить координаты вершин параллелограмма: (−1, 0) (пересечение y = ax + a и y = bx + b), (0, a), (0, b) и (1, a + b). Наименьшая ордината — 0, наибольшая — $a + b$, а их среднее арифметическое — ордината точки пересечения диагоналей, т.е. 20. Поэтому $a + b = 40$, и это ответ к задаче.

Задание № 8.2

Условие:

Даны a, b > 0. Точки пересечения прямых $y = ax + a$, $y = ax + b$, $y = bx + a$, $y = bx + b$, и образуют четырёхугольник. Точка пересечения диагоналей этого четырёхугольника имеет ординату, равную 30. Найдите максимальную из ординат вершин этого четырёхугольника.

Ответ: 60

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 8.1

Задание № 8.3

Условие:

Даны a, $b > 0$. Точки пересечения прямых $y = ax + a$, $y = ax + b$, $y = bx + a$, $y = bx + b$, и образуют четырёхугольник. Максимальная из ординат вершин этого четырёхугольника равна 20. Найдите ординату точки пересечения диагоналей этого четырёхугольника.

Ответ: 10

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 8.1

Задание № 8.4

Условие:

Даны $a, b > 0$. Точки пересечения прямых $y = ax + a$, $y = ax + b$, $y = bx + a$, $y = bx + b$, и образуют четырёхугольник. Максимальная из ординат вершин этого четырёхугольника равна 50. Найдите ординату точки пересечения диагоналей этого четырёхугольника.

Ответ: 25

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 8.1