Разбор заданий школьного этапа ВсОШ по математике

для 11 класса

2024/25 учебный год

Максимальное количество баллов — 8

Задание № 1.1

Условие:

Известно, что сумма квадратов корней трёхчлена $x^2 + 2ax + 2b$ равна сумме квадратов корней трёхчлена $x^2 + 2bx + 2a$. Чему равно $a + b$, если $a \neq b$?

Ответ: –1

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Обозначим x_{11}, x_{12} — корни трёхчлена $x^2 + 2ax + 2b$, а x_{21}, x_{22} — корни трёхчлена $x^2 + 2bx + 2a$.

По т.Виета $x_{11} + x_{12} = -2a$, а $x_{11}x_{12} = 2b$; $x_{21} + x_{22} = -2b$, а $x_{21}x_{22} = 2a$.

Из условия задачи $x_{11}^2 + x_{12}^2 = x_{21}^2 + x_{22}^2$.

А так как $(x_{11} + x_{12})^2 = x_{11}^2 + x_{12}^2 + 2x_{11}x_{12}$ и $(x_{21} + x_{22})^2 = x_{21}^2 + x_{22}^2 + 2x_{21}x_{22}$, откуда $(x_{11} + x_{12})^2 - 2x_{11}x_{12} = x_{11}^2 + x_{12}^2 = x_{21}^2 + x_{22}^2 = (x_{21} + x_{22})^2 - 2x_{21}x_{22}$, значит $(x_{11} + x_{12})^2 - 2x_{11}x_{12} = (x_{21} + x_{22})^2 - 2x_{21}x_{22}$.

Подставим данные из условия: $(-2a)^2 - 2 \cdot 2b = (-2b)^2 - 2 \cdot 2a$, откуда $4a^2 + 4a - (4b^2 + 4b) = 0$.

Решим это уравнение:

$$a^2 + a - (b^2 + b) = 0$$

$$a^2 - b^2 + a - b = 0$$

$$(a - b)(a + b) + a - b = 0$$

$$(a-b)(a+b+1)=0.$$

Из условия известно, что $a \neq b$, тогда $a + b = -1$.

Задание № 1.2

Условие:

Известно, что сумма квадратов корней трёхчлена $x^2 + 3ax + 3b$ равна сумме квадратов корней трёхчлена $x^2 + 3bx + 3a$. Чему равно $a + b$, если $a \neq b$?

Ответ: –2/3

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 1.1

Задание № 1.3

Условие:

Известно, что сумма квадратов корней трёхчлена $x^2 + 5ax + 5b$ равна сумме квадратов корней трёхчлена $x^2 + 5bx + 5a$. Чему равно $a + b$, если $a \neq b$?

Ответ: –2/5

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 1.1

Задание № 1.4

Условие:

Известно, что сумма квадратов корней трёхчлена $x^2 + 7ax + 7b$ равна сумме квадратов корней трёхчлена $x^2 + 7bx + 7a$. Чему равно $a + b$, если $a \neq b$?

Ответ: –2/7

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 1.1

Задание № 2.1

Условие:

Известно, что $F(F(x)) = 9x - 4$. Какой может быть функция $F(x)$?

Ответ:

- ○ $F(x) = 3x - 2$
- ✓ $F(x) = 3x - 1$
- ○ $F(x) = 3x + 1$
- ○ $F(x) = 3\sqrt{x} - 2$
- ○ $F(x) = 9x^2 - 4$
- ○ $F(x) = (9x - 4)^2$

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Первый способ решения. Поскольку тут предлагается конечное число вариантов, можно просто для каждого из них выполнить проверку и увидеть, что подходит, что не подходит.

Второй способ решения. По сути сокращающий перебор. Заметим, что окончательная функция линейная, это значит, что исходная функция тоже линейная. Или иначе на языке преобразований: линейное преобразование — это растяжение (сжатие) и параллельный перенос, и оно является композицией также линейных преобразований.

Поймём теперь, каких. Понятно, что коэффициент может быть либо 3, либо — 3. То есть это функция вида $3x + c$ (так как среди предложенных у нас -3 нет). Тогда, применяя дважды, получаем: $3(3x + c) + c = 9x - 4$. Откуда $4c = 4$ и, следовательно, $c = 1$.

Задание № 2.2

Условие:

Известно, что $F(F(x)) = 16x - 9$. Какой может быть функция $F(x)$?

Ответ:

- ○ $F(x) = 4x - 3$
- ○ $F(x) = 4x + 3$
- ○ $F(x) = 4\sqrt{x} - 3$
- ✓ $F(x) = 3 - 4x$
- ○ $F(x) = 4x^2 - 3$
- ○ $F(x) = (4x - 3)^2$

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 2.1

Задание № 2.3

Условие:

Известно, что $F(F(x)) = 4x - 3$. Какой может быть функция $F(x)$?

Ответ:

- ○ $F(x) = 2x + 3$
- ○ $F(x) = 3x - 1$
- ✓ $F(x) = 3 - 2x$
- ○ $F(x) = 2\sqrt{x} + 1$
- ○ $F(x) = 2x^2 - \sqrt{3}$
- ○ $F(x) = (2x - \sqrt{3})^2$

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 2.1

Задание № 2.4

Условие:

Известно, что $F(F(x)) = 9x - 2$. Какой может быть функция $F(x)$?

Ответ:

- ○ $F(x) = 3x - 1$
- ✓ $F(x) = 1 - 3x$
- ○ $F(x) = 9x^2 - 4$
- ○ $F(x) = 3x - \sqrt{2}$
- ○ $F(x) = 3\sqrt{x} - \sqrt{2}$
- ○ $F(x) = (3x - \sqrt{2})^2$

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 2.1

Задание № 3.1

Условие:

Назовём простое число *разложимым*, если его можно представить в виде суммы 5 составных чисел (не обязательно различных). Найдите наибольшее простое число, которое не является разложимым.

Ответ: 23

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Наименьшее нечётное составное число — 9, наименьшее чётное составное число — 4. Поэтому наименьшая сумма пяти составных чисел, хотя бы одно из которых нечётно, $9 + 4 + 4 + 4 + 4 = 25$. Бóльшие простые числа получаются, если заменить одну из 4 на подходящее чётное число. Меньшие нечётные числа не «разложимы», наибольшее простое из них — 23.

Задание № 3.2

Условие:

Назовём простое число *разложимым*, если его можно представить в виде суммы 4 составных чисел (не обязательно различных). Найдите наибольшее простое число, которое не является разложимым.

Ответ: 19

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 3.1

Задание № 3.3

Условие:

Назовём простое число *разложимым,* если его можно представить в виде суммы 9 составных чисел (не обязательно различных). Найдите наибольшее простое число, которое не является разложимым.

Ответ: 37

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 3.1

Задание № 3.4

Условие:

Назовём простое число *разложимым*, если его можно представить в виде суммы 7 составных чисел (не обязательно различных). Найдите наибольшее простое число, которое не является разложимым.

Ответ: 31

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 3.1

Задание № 4.1

Условие:

Бумажный прямоугольник ABCD со сторонами AB = 3 и BC = 4 согнули по прямой так, что вершина D попала в вершину B. Найдите длину линии сгиба.

Ответ: 3.75

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

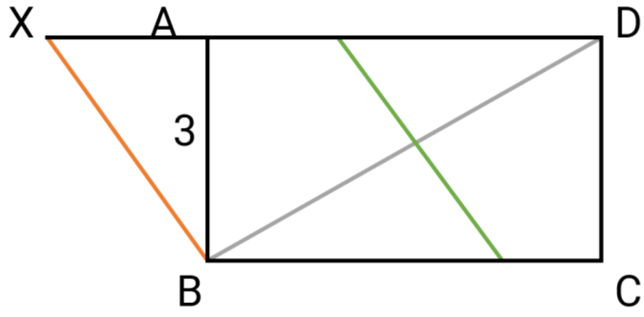
Заметим, что линия сгиба является серединным перпендикуляром к отрезку BD. Построим отрезок BX, параллельный и равный линии сгиба, проходящий через B и продолжение CD (пересечение с продолжением обозначим за X). Тогда BX перпендикулярен BD, откуда ∠XBD = 90°. Треугольники XBD и BAD подобны, т.к. ∠XBD = ∠BAD = 90°, ∠XDB = ∠ADB, т.к. X, A и D лежат на одной прямой (A лежит между X и D).

Тогда из подобия следует, что $\frac{XB}{BD} = \frac{BA}{AD}$, то есть XB $= \frac{BA}{AD} \cdot$ BD.

BA = 3 из условия, AD = BC = 4, т.к. бумажный лист прямоугольный,

BD = $\sqrt{(3^2 + 4^2)} = \sqrt{25}$ = 5 по теореме Пифагора.

Отсюда XB $= \frac{3}{4} \cdot 5 = 3.75$. Т.к. XB равен линии сгиба, то и линия сгиба равна 3.75.



Задание № 4.2

Условие:

Бумажный прямоугольник ABCD со сторонами AB = 6 и BC = 8 согнули по прямой так, что вершина D попала в вершину B. Найдите длину линии сгиба.

Ответ: 7.5

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 4.1

Задание № 4.3

Условие:

Бумажный прямоугольник ABCD со сторонами AB = 5 и BC = 12 согнули по прямой так, что вершина D попала в вершину B. Найдите длину линии сгиба.

Ответ: 65/12

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 4.1

Задание № 4.4

Условие:

Бумажный прямоугольник ABCD со сторонами AB = 10 и BC = 24 согнули по прямой так, что вершина D попала в вершину B. Найдите длину линии сгиба.

Ответ: 130/12

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 4.1

Задание № 5.1

Условие:

Ровно в полдень муравей выбегает из муравейника и по прямой тропинке бежит к полю. Через минуту вслед за ним выбегает второй муравей и бежит вслед за первым, но со скоростью на 1 см/мин большей, чем скорость первого. И так далее: каждую минуту из муравейника выбегает следующий муравей и бежит вдогонку за остальными со скоростью на 1 см/мин большей, чем скорость предыдущего. Какой по счёту муравей будет возглавлять процессию через 2 часа, если скорость первого муравья равна 70 см/мин? Если муравьев будет несколько, укажите их всех.

Ответ: 26

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Пусть скорость первого муравья V. Тогда скорость k-го муравья $V + k – 1$. А бежать он будет $120 – (k – 1)$ минут. Тогда впереди будет тот муравей, кто к 14:00 окажется дальше всего от муравейника. То есть тот, у кого больше всего будет произведение $(120 – (k – 1))(V + (k – 1)) = – (k – 1)^2 – (k – 1)(V – 120) + 120V$.

Это парабола относительно $(k – 1)$, ветви которой направлены вниз. Соответственно максимум достигается в её вершине. А именно в точке $k – 1 = (120 – V) \div 2$.

Для нашего конкретного $V = 70$ $k – 1 = 25$, то есть $k = 26$.

Задание № 5.2

Условие:

Ровно в полдень муравей выбегает из муравейника и по прямой тропинке бежит к полю. Через минуту вслед за ним выбегает второй муравей и бежит вслед за первым, но со скоростью на 1 см/мин большей, чем скорость первого. И так далее: каждую минуту из муравейника выбегает следующий муравей и бежит вдогонку за остальными со скоростью на 1 см/мин большей, чем скорость предыдущего. Какой по счёту муравей будет возглавлять процессию через 2 часа, если скорость первого муравья равна 60 см/мин? Если муравьев будет несколько, укажите их всех.

Ответ: 31

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 5.1

Задание № 5.3

Условие:

Ровно в полдень муравей выбегает из муравейника и по прямой тропинке бежит к полю. Через минуту вслед за ним выбегает второй муравей и бежит вслед за первым, но со скоростью на 1 см/мин большей, чем скорость первого. И так далее: каждую минуту из муравейника выбегает следующий муравей и бежит вдогонку за остальными со скоростью на 1 см/мин большей, чем скорость предыдущего. Какой по счёту муравей будет возглавлять процессию через 2 часа, если скорость первого муравья равна 80 см/мин? Если муравьев будет несколько, укажите их всех.

Ответ: 21

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 5.1

Задание № 5.4

Условие:

Ровно в полдень муравей выбегает из муравейника и по прямой тропинке бежит к полю. Через минуту вслед за ним выбегает второй муравей и бежит вслед за первым, но со скоростью на 1 см/мин большей, чем скорость первого. И так далее: каждую минуту из муравейника выбегает следующий муравей и бежит вдогонку за остальными со скоростью на 1 см/мин большей, чем скорость предыдущего. Какой по счёту муравей будет возглавлять процессию через 2.5 часа, если скорость первого муравья равна 60 см/мин? Если муравьев будет несколько, укажите их всех.

Ответ: 46

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 4

Решение по аналогии с заданием 5.1

Задание № 6.1

Условие:

На плоскости проведено 10 прямых. Известно, что если выбрать из этих прямых любые 4, то среди выбранных прямых найдутся хотя бы две параллельные. Какое наибольшее количество точек пересечения могут иметь между собой все проведённые прямые?

Ответ: 33

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Рассмотрим расположение с максимальным количеством точек пересечения. В нём никакие три прямые не пересекаются в одной точке, т.к. иначе можно сдвинуть одну из прямых, которая участвует в вышеуказанном тройном пересечении, и количество точек пересечения увеличится.

Разобьём прямые на группы таким образом, что прямые находятся в одной группе тогда и только тогда, когда они параллельны. Заметим, что групп не более, чем 3, т.к. иначе можно выбрать по одной прямой из 4 различных групп, и получится четвёрка прямых, среди которых нет пары параллельных.

Пусть $X \geq Y \geq Z$ — количество прямых в группах. Считаем понятным, что точек пересечения тогда равно сумме попарных произведений, а именно

$$X \cdot Y + X \cdot Z + Y \cdot Z.$$

Пусть в расположении прямых с максимальным количеством точек пересечения X больше Z хотя бы на 2. Тогда сотрём одну прямую из группы X и проведём прямую параллельную прямым из группы Z. Тогда количество точек пересечения изменится на $(X - 1) + Y - Y - Z = X - Z - 1$, что больше 0.

Значит в максимальном расположении $X = Z$ или $Z + 1$,

откуда $X = 4$, $Y = 4$, $Z = 3$ или $X = 4$, $Y = 3$, $Z = 3$.

Первый вариант нам не подходит (прямых 11), а второй является решением задачи. Таким образом ответ 12 + 12 + 9 = 33.

Задание № 6.2

Условие:

На плоскости проведено 11 прямых. Известно, что если выбрать из этих прямых любые 4, то среди выбранных прямых найдутся хотя бы две параллельные. Какое наибольшее количество точек пересечения могут иметь между собой все проведённые прямые?

Ответ: 40

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 6.1

Задание № 6.3

Условие:

На плоскости проведено 13 прямых. Известно, что если выбрать из этих прямых любые 4, то среди выбранных прямых найдутся хотя бы две параллельные. Какое наибольшее количество точек пересечения могут иметь между собой все проведённые прямые?

Ответ: 56

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 6.1

Задание № 6.4

Условие:

На плоскости проведено 14 прямых. Известно, что если выбрать из этих прямых любые 4, то среди выбранных прямых найдутся хотя бы две параллельные. Какое наибольшее количество точек пересечения могут иметь между собой все проведённые прямые?

Ответ: 65

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 6.1

Задание № 7.1

Условие:

Коля придумал функцию

$$f(x) = (x - 100)(2x - 200)(3x - 300) - (ax^3 + bx^2 + cx + d)$$

При некоторых фиксированных значениях параметров (a, b, c, d) функция f(x) такова, что:

$$\begin{cases} f(1) = \pi \\ f(2) = \pi \\ f(3) = \pi \\ f(4) = \pi \end{cases}$$

Найдите значение параметра a.

Ответ: 6

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Многочлен третьей степени может иметь одинаковое значение в четырёх точках, только если он тождественен. Поэтому коэффициент при x^3 равен 0, то есть a = 6.

Задание № 7.2

Условие:

Коля придумал функцию

$$f(x) = (x - 100)(2x - 200)(4x - 400) - (ax^3 + bx^2 + cx + d)$$

При некоторых фиксированных значениях параметров (a, b, c, d) функция f(x) такова, что:

$$\begin{cases} f(1) = \pi/2 \\ f(2) = \pi/2 \\ f(4) = \pi/2 \\ f(8) = \pi/2 \end{cases}$$

Найдите значение параметра a.

Ответ: 8

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 7.1

Задание № 7.3

Условие:

Коля придумал функцию

$$f(x) = (x - 100)(3x - 300)(5x - 500) - (ax^3 + bx^2 + cx + d)$$

При некоторых фиксированных значениях параметров (a, b, c, d) функция f(x) такова, что:

$$\begin{cases} f(1) = 2\pi \\ f(3) = 2\pi \\ f(5) = 2\pi \\ f(7) = 2\pi \end{cases}$$

Найдите значение параметра a.

Ответ: 15

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 7.1

Задание № 7.4

Условие:

Коля придумал функцию

$$f(x) = (2x - 200)(3x - 300)(4x - 400) - (ax^3 + bx^2 + cx + d)$$

При некоторых фиксированных значениях параметров (a, b, c, d) функция f(x) такова, что:

$$\begin{cases} f(2) = 3\pi \\ f(3) = 3\pi \\ f(4) = 3\pi \\ f(5) = 3\pi \end{cases}$$

Найдите значение параметра a.

Ответ: 24

Точное совпадение ответа — 1 балл

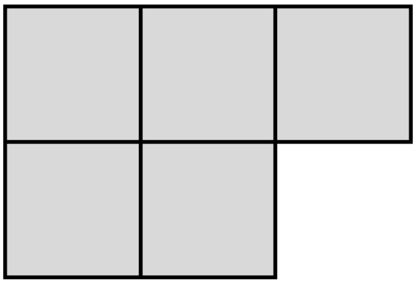
Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 7.1

Задание № 8.1

Условие:

Известно, что количество способов вырезать по линиям сетки из клетчатого квадрата N × N квадрат 2 × 2 в 7 раз меньше, чем количество способов вырезать из этого же квадрата фигуру P-пентамино (см. рисунок).



Найдите сторону N такого квадрата. Фигуру можно поворачивать и переворачивать.

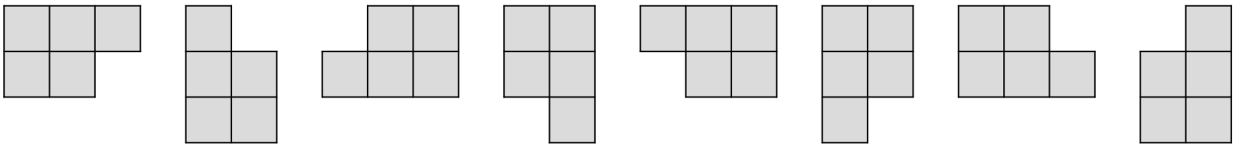
Ответ: 9

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Посчитаем количество способов вырезать из квадрата $N \times N$ квадрат 2 × 2. Это будет $(N-1) \times (N-1)$ т.к. левой верхней клеткой квадрата 2 × 2 может быть любая из



$(N-1) \times (N-1)$ клеток (все, кроме нижней строчки и правого столбца). Посчитаем аналогично количество способов вырезать из квадрата $N \times N$ пентамино, учитывая то, что повернуть эту фигуру можно 8 способами.

Получаем $8 \cdot (N-1) \cdot (N-2)$.

Отсюда получается уравнение

$$8 \cdot (N-1) \cdot (N-2) \ = \ 7 \cdot (N-1) \cdot (N-1)$$

$$8 \cdot (N-2) \ = \ 7 \cdot (N-1)$$

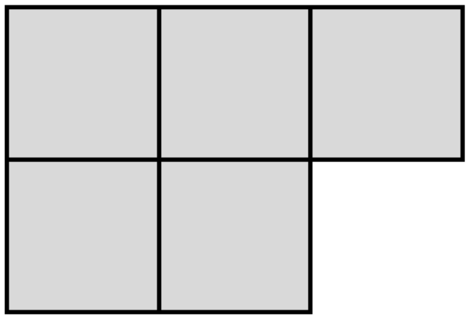
$$8N - \ 16 \ = \ 7N - \ 7$$

$$N \ = \ 16 - \ 7 \ = \ 9.$$

Задание № 8.2

Условие:

Известно, что количество способов вырезать по линиям сетки из клетчатого квадрата N × N полоску 1 × 3 в 3 раза меньше, чем количество способов вырезать из этого же квадрата фигуру P-пентамино (см. рисунок).



Найдите сторону N такого квадрата. Фигуру можно поворачивать и переворачивать.

Ответ: 4

Точное совпадение ответа — 1 балл

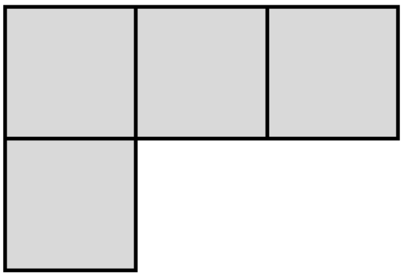
Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 8.1

Задание № 8.3

Условие:

Известно, что количество способов вырезать по линиям сетки из клетчатого квадрата N × N квадрат 2 × 2 в 6 раз меньше, чем количество способов вырезать из этого же квадрата фигуру Г-тетрамино (см. рисунок).



Найдите сторону N такого квадрата. Фигуру можно поворачивать и переворачивать.

Ответ: 5

Точное совпадение ответа — 1 балл

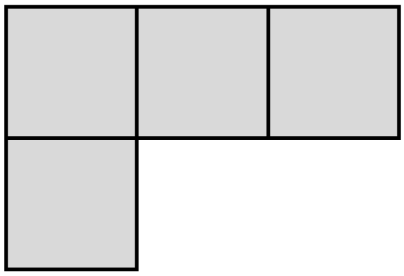
Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 8.1

Задание № 8.4

Условие:

Известно, что количество способов вырезать по линиям сетки из клетчатого квадрата N × N полоску 1 × 3 в $3\frac{1}{2}$ раза меньше, чем количество способов вырезать из этого же квадрата фигуру Г-тетрамино (см. рисунок).



Найдите сторону N такого квадрата. Фигуру можно поворачивать и переворачивать.

Ответ: 8

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 8.1