Разбор заданий школьного этапа ВсОШ по математике

для 10 класса

2024/25 учебный год

Максимальное количество баллов — 8

Задание № 1.1

Условие:

Запишите наименьшее натуральное число, делящееся на 36, в десятичной записи которого присутствуют только цифры 1 и 0.

Ответ: 11111111100

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

$36 = 2^2 \cdot 3^2$, значит число должно делиться на 9 и на 4. По признаку делимости на 9, сумма цифр числа должна быть кратна 9. Тогда, учитывая, что 0 не является натуральным числом, искомое число должно состоять хотя бы из 9 единиц. Чтобы число делилось на 4 в конце числа должно быть хотя бы два нуля (11, 10, 01 не делится на 4). Итого, наименьшее число, состоящее хотя бы из девяти единиц и двух нулей на конце, это 11111111100.

Задание № 1.2

Условие:

Запишите наименьшее натуральное число, делящееся на 36, в десятичной записи которого присутствуют только цифры 2 и 0.

Ответ: 2222222220

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 1.1

Задание № 1.3

Условие:

Запишите наименьшее натуральное число, делящееся на 36, в десятичной записи которого присутствуют только цифры 7 и 0.

Ответ: 77777777700

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 1.1

Задание № 1.4

Условие:

Запишите наименьшее натуральное число, делящееся на 36, в десятичной записи которого присутствуют только цифры 5 и 0.

Ответ: 55555555500

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 1.1

Задание № 2.1

Условие:

Имеется бумажный прямоугольник. Если его разрезать девятью параллельными разрезами на 10 одинаковых маленьких прямоугольников, то периметр каждого маленького прямоугольника будет в 4 раза меньше, чем периметр исходного прямоугольника. Найдите отношение большей стороны к меньшей стороне исходного прямоугольника.

Ответ: 5

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Пусть A и B — длины сторон исходного прямоугольника. Тогда, не умаляя общности, пусть делили вдоль стороны B. Значит стороны маленьких прямоугольников $A \div 10$ и B. Тогда можно составить уравнение, где периметр исходного прямоугольника равен увеличенному в 4 раза периметру маленького прямоугольника: $2(A + B) = 4 \cdot 2 \cdot (A \div 10 + B) \Rightarrow 2A + 2B = 8A \div 10 + 8B \Rightarrow 6B = 12A \div 10 \Rightarrow A = 5B$. Значит $A \div B = 5$.

Задание № 2.2

Условие:

Имеется бумажный прямоугольник. Если его разрезать двенадцатью параллельными разрезами на 13 одинаковых маленьких прямоугольников, то периметр каждого маленького прямоугольника будет в 5 раз меньше, чем периметр исходного прямоугольника. Найдите отношение большей стороны к меньшей стороне исходного прямоугольника.

Ответ: 6.5

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 2.1

Задание № 2.3

Условие:

Имеется бумажный прямоугольник. Если его разрезать восемью параллельными разрезами на 9 одинаковых маленьких прямоугольников, то периметр каждого маленького прямоугольника будет в 3 раза меньше, чем периметр исходного прямоугольника. Найдите отношение большей стороны к меньшей стороне исходного прямоугольника.

Ответ: 3

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 2.1

Задание № 2.4

Условие:

Имеется бумажный прямоугольник. Если его разрезать десятью параллельными разрезами на 11 одинаковых маленьких прямоугольников, то периметр каждого маленького прямоугольника будет в 3 раза меньше, чем периметр исходного прямоугольника. Найдите отношение большей стороны к меньшей стороне исходного прямоугольника.

Ответ: 2.75

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 2.1

Задание № 3.1

Условие:

На одном чертеже изображены графики четырёх функций вида

$$y = x^2 + bx + c.$$

Сколько точек пересечения этих графиков может быть? Выберите все возможные варианты:

Ответ:

- ✓ 3
- ✓ 4
- ✓ 5
- ✓ 6
- o 7
- o 8
- o 9
- o 10

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Все графики такого вида — это параболы, получающиеся из параболы $y = x^2$ путем разнообразных параллельных переносов. Соответственно любые две такие параболы либо не пересекаются (если сдвиг от одной к другой происходит вдоль оси OY), либо пересекаются ровно в одной точке (например, потому что уравнение $x^2 + bx + c = x^2 + dx + k$ имеет максимум одно решение).

Для каждого из вариантов от 0 до 6 можно привести пример.

Задание № 3.2

Условие:

На одном чертеже изображены графики четырёх функций вида

$$y = x^2 + bx + c.$$

Сколько точек пересечения этих графиков может быть? Выберите все возможные варианты:

Ответ:

- ○ 0
- ✓ 3
- ✓ 4
- ✓ 5
- ✓ 6
- ○ 7
- ○ 8
- ○ 9
- ○ 10

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 3.1

Задание № 3.3

Условие:

На одном чертеже изображены графики четырёх функций вида

$$y = x^2 + 2bx + 2c.$$

Сколько точек пересечения этих графиков может быть? Выберите все возможные варианты:

Ответ:

- ✓ 3
- ✓ 4
- ✓ 5
- ✓ 6
- ○ 7
- ○ 8
- ○ 9
- ○ 10

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 3.1

Задание № 3.4

Условие:

На одном чертеже изображены графики четырёх функций вида

$$y = x^2 + 2bx + 2c.$$

Сколько точек пересечения этих графиков может быть? Выберите все возможные варианты:

Ответ:

- ✓ 0
- ✓ 3
- ✓ 4
- ✓ 5
- ✓ 6
- ○ 7
- ○ 8
- ○ 9
- ○ 10

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 3.1

Задание № 4.1

Условие:

Сколько существует таких троек натуральных чисел (A, B, N), что A + B = 62, а B больше A ровно на N процентов?

Ответ: 8

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Если A + B = 62, то B больше A ровно на $\frac{62 - A - A}{A} \cdot 100$ процентов. Чтобы это число получилось натуральным, необходимо и достаточно, чтобы A было строго меньше половины суммы, и являлось делителем числа $62 \cdot 100$. Подходит A = 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25.

Задание № 4.2

Условие:

Сколько существует таких троек натуральных чисел (A, B, N), что A + B = 46, а B больше A ровно на N процентов?

Ответ: 7

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 4.1

Задание № 4.3

Условие:

Сколько существует таких троек натуральных чисел (A, B, N), что A + B = 38, а B больше A ровно на N процентов?

Ответ: 6

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 4.1

Задание № 4.4

Условие:

Сколько существует таких троек натуральных чисел (A, B, N), что A + B = 82, а B больше A ровно на N процентов?

Ответ: 9

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 4.1

Задание № 5.1

Условие:

За круглым столом собрались 20 человек, каждый из них либо лжец, который всегда врёт, либо рыцарь, который всегда говорит правду. Каждый из сидящих за столом сделал заявление:

«Среди четырёх ближайших ко мне в круге людей (2 соседа справа и 2 соседа слева) есть хотя бы один лжец!»

Сколько лжецов могло быть в круге? Укажите все возможные варианты, записывая каждый в отдельное поле.

Ответ:

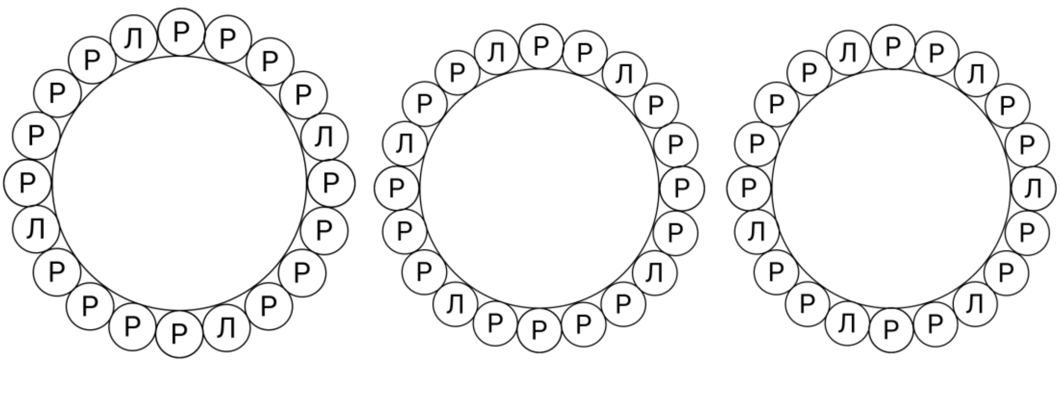
- ✓ 4
- ✓ 5
- ✓ 6

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Среди любых 5 подряд идущих людей есть хотя бы 1 лжец, поэтому лжецов не может быть меньше 1/5 от всего количества людей. С другой стороны, среди любых 3 подряд идущих людей хотя бы двое должны быть рыцарями. Поэтому лжецов не более 1/3 от всего количества людей.



Задание № 5.2

Условие:

За круглым столом собрались 17 человек, каждый из них либо лжец, который всегда врёт, либо рыцарь, который всегда говорит правду. Каждый из сидящих за столом сделал заявление:

*«Среди четырёх ближайших ко мне в круге людей (*2 *соседа справа и* 2 *соседа слева) есть хотя бы один лжец!»*

Сколько лжецов могло быть в круге? Укажите все возможные варианты, записывая каждый в отдельное поле.

Ответ:

- ✓ 4
- ✓ 5

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 5.1

Задание № 5.3

Условие:

За круглым столом собрались 15 человек, каждый из них либо лжец, который всегда врёт, либо рыцарь, который всегда говорит правду. Каждый из сидящих за столом сделал заявление:

*«Среди четырёх ближайших ко мне в круге людей (*2 *соседа справа и* 2 *соседа слева) есть хотя бы один лжец!»*

Сколько лжецов могло быть в круге? Укажите все возможные варианты, записывая каждый в отдельное поле.

Ответ:

- ✓ 3
- ✓ 4
- ✓ 5

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 5.1

Задание № 5.4

Условие:

За круглым столом собрались 14 человек, каждый из них либо лжец, который всегда врёт, либо рыцарь, который всегда говорит правду. Каждый из сидящих за столом сделал заявление:

«Среди четырёх ближайших ко мне в круге людей (2 соседа справа и 2 соседа слева) есть хотя бы один лжец!»

Сколько лжецов могло быть в круге? Укажите все возможные варианты, записывая каждый в отдельное поле.

Ответ:

- ✓ 3
- ✓ 4

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 5.1

Задание № 6.1

Условие:

Имеется восемь одинаковых игральных кубиков, на гранях которых написаны натуральные числа от 1 до 6. Кубики таковы, что на любой паре противоположных граней написаны числа, отличающиеся на 1. Из этих восьми кубиков собрали куб размером $2 \times 2 \times 2$ так, что сумма чисел на любых двух прислонённых друг к другу гранях оказалась равна 7. При этом сумма чисел на верхней грани этого большого куба равна 11. Найдите сумму чисел на нижней его грани.

Ответ: 17

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Заметим, что числа на гранях каждого кубика располагаются так: напротив 1 стоит 2 (больше ничего не может быть), напротив 6 — 5, а тогда напротив 3 стоит 4. То есть мы можем сказать, что напротив нечётного числа x стоит число $x + 1$, а напротив чётного y стоит $y – 1$. Посмотрим на какое-нибудь число x, стоящее на верхней грани большого куба. Пусть x написано на грани кубика A, под которым находится кубик B. Если $x = 1$, 3 или 5, то на нижней грани A находится $x + 1$, на верхней грани B – $7 – x – 1 = 6 – x$ (это снова 1, 3 или 5), на нижней грани B – $7 – x$. Аналогично, если x чётно, то на нижней грани A стоит $x – 1$, на верхней грани B – $7 – x + 1 = 8 – x$ (число чётное), а тогда на нижней грани B находится $8 – x – 1 = 7 – x$. Итак, на верхней грани A и на нижней грани B стоят числа, в сумме дающие 7. Следовательно, сумма всех чисел на верхней и нижней гранях большого куба должна быть равна 28. Так как сумма чисел на верхней грани равна 11, то на нижней будет 17.

Задание № 6.2

Условие:

Имеется восемь одинаковых игральных кубиков, на гранях которых написаны натуральные числа от 1 до 6. Кубики таковы, что на любой паре противоположных граней написаны числа, отличающиеся на 3. Из этих восьми кубиков собрали куб размером $2 \times 2 \times 2$ так, что сумма чисел на любых двух прислонённых друг к другу гранях оказалась равна 7. При этом сумма чисел на передней грани этого большого куба равна 13. Найдите сумму чисел на задней его грани.

Ответ: 15

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 6.1

Задание № 6.3

Условие:

Имеется восемь одинаковых игральных кубиков, на гранях которых написаны натуральные числа от 1 до 6. Кубики таковы, что на любой паре противоположных граней написаны числа, отличающиеся на 1. Из этих восьми кубиков собрали куб размером $2 \times 2 \times 2$ так, что сумма чисел на любых двух прислонённых друг к другу гранях оказалась равна 7. При этом сумма чисел на левой грани этого большого куба равна 16. Найдите сумму чисел на правой его грани.

Ответ: 12

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 6.1

Задание № 6.4

Условие:

Имеется восемь одинаковых игральных кубиков, на гранях которых написаны натуральные числа от 1 до 6. Кубики таковы, что на любой паре противоположных граней написаны числа, отличающиеся на 3. Из этих восьми кубиков собрали куб размером $2 \times 2 \times 2$ так, что сумма чисел на любых двух прислонённых друг к другу гранях оказалась равна 7. При этом сумма чисел на верхней грани этого большого куба равна 10. Найдите сумму чисел на нижней его грани.

Ответ: 18

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 6.1

Задание № 7.1

Условие:

Дан треугольник ABC с углом B, равным 60°. В точках A и C провели две касательные к описанной окружности ABC, пересекающиеся в точке P. Перпендикуляр к BC, восстановленный в точке C, пересекает прямую AB в точке Q. Найдите ∠CQP, если ∠BAC = 40°.

Ответ: 50

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

По лемме об угле между касательной и хордой углы PAC = PCA = ABC = 60°. Поэтому треугольник PCA равносторонний.

По сумме углов треугольника ACQ угол AQC равен $180 - 90 - 60 = 30°$. Поэтому точка Q лежит на окружности с центром P и радиусом PC = PA. Это можно понимать по-разному, можно сформулировать теорему, обратную теореме о центральном угле, а можно делать через прямую теорему о центральном угле.

Через прямую теорему: пусть окружность с центром P и радиусом PA пересекает луч BA в точке Q'. Тогда, по теореме о центральном угле, угол AQ'C равен половине угла $APC = \frac{60}{2} = 30$. Но угол AQC тоже равен 30. Поэтому у треугольника QQ'C, если он существует, очень тяжёлая жизнь, у него внешний угол равен внутреннему, что невозможно.

Если следить за судьбой треугольника QQ'C слишком грустно, то можно сказать иначе: Из-за равенства углов BQC = BQ'C = 30° получается, что прямые QC и Q'C должны быть параллельны или совпадать. Но параллельными они быть не могут, потому что имеют общую точку C. Значит, они совпадают и, значит, совпадают точки Q и Q'.

Пусть угол BAC = α.

Тогда $BCA = 120 - \alpha$.

Тогда $ACQ = 90 - BCA = \alpha - 30$.

По теореме о центральном угле APQ = 2 $ACQ = 2\alpha - 60$.

По сумме углов треугольника $AQP = QAP = 90 - \frac{APQ}{2} = 120 - \alpha$.

Получаем $CQP = AQP - 30 = 90 - \alpha$.

Подставляя конкретные значения BAC = α, получаем соответствующий ответ.

Задание № 7.2

Условие:

Дан треугольник ABC с углом B, равным 60°. В точках A и C провели две касательные к описанной окружности ABC, пересекающиеся в точке P. Перпендикуляр к BC, восстановленный в точке C, пересекает прямую AB в точке Q. Найдите $\angle CQP$, если $\angle BAC = 50°$.

Ответ: 40

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 7.1

Задание № 7.3

Условие:

Дан треугольник ABC с углом B, равным 60°. В точках A и C провели две касательные к описанной окружности ABC, пересекающиеся в точке P. Перпендикуляр к BC, восстановленный в точке C, пересекает прямую AB в точке Q. Найдите ∠CQP, если ∠BAC = 70°.

Ответ: 20

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 7.1

Задание № 7.4

Условие:

Дан треугольник ABC с углом B, равным 60°. В точках A и C провели две касательные к описанной окружности ABC, пересекающиеся в точке P. Перпендикуляр к BC, восстановленный в точке C, пересекает прямую AB в точке Q. Найдите $\angle CQP$, если $\angle BAC = 80°$.

Ответ: 10

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 7.1

Задание № 8.1

Условие:

Назовём натуральное число *интересным*, если в его двоичной записи не более 2 единиц. Например, числа $4 = 100_2$ и $40 = 101000_2$ — *интересные*, а число $14 = 1110_2$ *интересным* не является. Сколько существует интересных чисел, меньших 1000?

Ответ: 55

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение.

Число меньше 1000 в двоичной записи не более чем десятизначно. Имеем десять степеней двойки (включая нулевую), и для старшего разряда N ровно $N - 1$ возможностей поставить вторую двойку. Итого, $10 + (9 + 8 + 7 + \ldots + 1) = 55$ возможных вариантов.

Задание № 8.2

Условие:

Назовём натуральное число *интересным*, если в его двоичной записи не более 2 единиц. Например, числа $4 = 100_2$ и $40 = 101000_2$ — *интересные*, а число $14 = 1110_2$ *интересным* не является. Сколько существует интересных чисел, меньших 2000?

Ответ: 66

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 8.1

Задание № 8.3

Условие:

Назовём натуральное число *интересным*, если в его двоичной записи не более 2 единиц. Например, числа $4 = 100_2$ и $40 = 101000_2$ — *интересные*, а число $14 = 1110_2$ *интересным* не является. Сколько существует интересных чисел, меньших 4000?

Ответ: 78

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 8.1

Задание № 8.4

Условие:

Назовём натуральное число *интересным*, если в его двоичной записи не более 2 единиц. Например, числа $4 = 100_2$ и $40 = 101000_2$ — *интересные*, а число $14 = 1110_2$ *интересным* не является. Сколько существует интересных чисел, меньших 8000?

Ответ: 91

Точное совпадение ответа — 1 балл

Максимальный балл за задание — 1

Решение по аналогии с заданием 8.1